APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN A PROBLEMAS DE ENFRIAMIENTO

Se sabe de observaciones experimentales que, con una exactitud satisfactoria, en muchas circunstancias, la temperatura superficial de un objeto cambia a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la de sus alrededores. Esto se conoce como la Ley de Enfriamiento de Newton.

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Si T(t) es la temperatura de un objeto en un instante de tiempo t, T_a es la temperatura del ambiente constante y β la constante de proporcionalidad entonces la **ecuación diferencial asociada a los problemas de enfriamiento** (calentamiento) es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \beta\,[T(t) - T_a]$$

Se necesita conocer la lectura de la temperatura del objeto en dos instantes diferentes, ya que hay dos constantes por determinar: la constante de proporcionalidad β y la constante de integración.

Se tendrá entonces un problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt} = \beta\,[T(t) - Ta] \\ T(0) = T_0 \\ T(t_1) = T_1 \end{cases}$$

La solución del problema de valor de frontera permite obtener la Ley de Variación de la temperatura en función del tiempo (esto es, una ecuación para T(t))

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN, A PROBLEMAS DE ENFRIAMIENTO

1. La temperatura de una taza de café acabada de servir es de 200º F. Un minuto después se ha enfriado a 190º F en un cuarto que está a 70º F ¿Qué tan grande debe ser el período que debe transcurrir antes de que el café alcance una temperatura de 150º F?

SOLUCIÓN:

Lo primero que debe hacerse es establecer los datos que se conocen y los que se deben determinar.

La temperatura del café acabado de servir, representa la temperatura inicial del café, es decir, para el tiempo $t_o = 0$ min, la temperatura es $T_0 = 200$ º F.

De acuerdo con el enunciado del problema, para el tiempo $t_1 = 1$ minuto, la temperatura es $T_1 = 190$º F.

También se dice en el enunciado, que la temperatura del cuarto, en el cual se está enfriando el café, es de 70º F. Esto representa la temperatura del ambiente: $T_a = 70$º F.

Puesto que la ecuación diferencial asociada a los problemas de enfriamiento, de acuerdo con la Ley de enfriamiento de Newton, es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - 70) \qquad (1)$$

lo que queda planteado es resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\,(T - 70) \\ T(0) = 200 \\ T(1) = 190 \end{cases}$$

Ya que, la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, al sustituir $\frac{dT}{dt}$, dado por la ecuación (1)

$$dT = \beta\,(T - 70)\, dt \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (1) por el factor $\frac{1}{T-70}$

$$\left(\frac{1}{T-70}\right) dT = \beta\, dt$$

integrando

$$\int \left(\frac{1}{T-70} \right) dT = \int \beta \, dt \qquad (3)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \left(\frac{1}{T-70} \right) dT = \ln | T - 70 | + C_1$$

$$\int \beta \, dt = \beta t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (3)

$$\ln | T - 70 | = \beta t + C \qquad (4)$$

Los valores de la constante de proporcionalidad β y de la constante de integración C, deben determinarse. Para ello, se utilizan las condiciones de frontera.

El valor de la constante C de integración se obtiene utilizando la condición T(0) = 200, es decir, se sustituye en la ecuación (2) t = 0 y T = 200, obteniéndose C = ln 130. Este valor de C se sustituye en la ecuación (4)

$$\ln | T - 70 | = \beta t + \ln 130 \qquad (5)$$

El valor de la constante β de proporcionalidad se obtiene utilizando la condición T(1) = 190, es decir, se sustituye en la ecuación (5) t = 1 y T = 190, obteniéndose

$$\ln 120 = \beta + \ln 130 \Rightarrow \beta = \ln 120 - \ln 130$$

por propiedades de logaritmo, $\beta = \ln \left(\frac{12}{13} \right)$.

Este valor de β se sustituye en la ecuación (5)

$$\ln | T - 70 | = t \ln \left(\frac{12}{13} \right) + \ln 130$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln | T - 70 | = \ln \left[130 \left(\frac{12}{13} \right)^t \right]$$

aplicando e

$$T - 70 = 130 \left(\frac{12}{13} \right)^t$$

despejando T

$$T(t) = 130 \left(\frac{12}{13} \right)^t + 70 \qquad (6)$$

La ecuación (6) representa la ley de variación de la temperatura del café en cualquier instante t. Para determinar el tiempo t_2 que debe transcurrir para que la temperatura del café llegue a 150º F, se sustituyen en la ecuación (6) $t = t_2$ y T = 150

$$150 = 130\left(\frac{12}{13}\right)^{t_2} + 70$$

efectuando

$$\frac{150-70}{130} = \left(\frac{12}{13}\right)^{t_2}$$

aplicando logaritmo a ambos lados

$$\ln\left(\frac{8}{13}\right) = \ln\left(\frac{12}{13}\right)^{t_2}$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln\left(\frac{8}{13}\right) = t_2 \ln\left(\frac{12}{13}\right)$$

despejando t_2

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{8}{13}\right)}{\ln\left(\frac{12}{13}\right)} = \frac{-0{,}49}{-0{,}08} = 6{,}125$$

Deben transcurrir 6,125 minutos, lo que equivale a 6 min y 7 seg, para que la temperatura del café llegue a 150º F.

2. Resolver el mismo problema anterior, utilizando otro procedimiento

SOLUCIÓN:

Según se había establecido en el problema anterior, lo que se debe resolver es el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\,(T-70) \\ T(0) = 200 \\ T(1) = 190 \end{cases} \qquad (1)$$

Ya que, la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, al sustituir $\frac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (1)

$$dT = \beta\,(T-70)\,dt \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (2) por el factor $\frac{1}{T-70}$

$$\left(\frac{1}{T-70}\right) dT = \beta\, dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) se integra definidamente; el tiempo varía de 0 a 1 y la temperatura de 200 a 190

$$\int_{200}^{190} \frac{1}{T-70}\, dT = \int_{0}^{1} \beta\, dt \qquad (4)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{200}^{190} \frac{1}{T-70}\, dT = -\int_{190}^{200} \frac{1}{T-70}\, dT = -\ln\left| T-70 \right| \Big/_{190}^{200} = -\ln 130 + \ln 120 = \ln\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\int_{0}^{1} \beta\, dt = \beta \int_{0}^{1} dt = t \Big/_{0}^{1} = \beta$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln\left(\frac{12}{13}\right) = \beta$$

(observe que este es, exactamente, el mismo valor obtenido para β en el problema 1) este valor de β, se sustituye en la ecuación (3)

$$\left(\frac{1}{T-70}\right) dT = \ln\left(\frac{12}{13}\right) dt \qquad (5)$$

Para determinar el tiempo que debe transcurrir para que la temperatura del café llegue a 150º F, se integra de forma definida la ecuación (5); el tiempo varía entre 0 y el tiempo t_2 a determinar y la temperatura varía entre 200 y 150

$$\int_{200}^{150} \frac{1}{T-70}\, dT = \ln\left(\frac{12}{13}\right) \int_{0}^{t_2} dt \qquad (6)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{200}^{150} \frac{1}{T-70}\, dT = -\int_{150}^{200} \frac{1}{T-70}\, dT = -\ln\left| T-70 \right| \Big/_{150}^{200} = -\ln 130 + \ln 80 = \ln\left(\frac{8}{13}\right)$$

$$\ln\left(\frac{12}{13}\right) \int_{0}^{t_2} dt = \ln\left(\frac{12}{13}\right) t \Big/_{0}^{t_2} = t_2 \ln\left(\frac{12}{13}\right)$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$\ln\left(\frac{8}{13}\right) = t_2 \ln\left(\frac{12}{13}\right)$$

despejando t_2

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{8}{13}\right)}{\ln\left(\frac{12}{13}\right)} = \frac{-0,49}{-0,08} = 6,125$$

(observe que este es, exactamente, el mismo valor obtenido para t_2 en el problema 1)

Deben transcurrir 6,125 minutos, lo que equivale a 6 min y 7 seg, para que la temperatura del café llegue a 150º F.

3. Agua a temperatura de 100º C se enfría en 10 minutos a 80º C, en un cuarto cuya temperatura es de 25º C. Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos. ¿Cuándo la temperatura será de 40º C y 26º C?

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a problemas de enfriamiento es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_a) \qquad (1)$$

Esta ecuación diferencial debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t_0 = 0 min, la temperatura del agua es T_0 = 100º C; la segunda condición es que para el tiempo t_1 = 10 min, la temperatura del agua es T_1 = 80º C. Además, la temperatura del ambiente donde debe enfriarse el agua es T_a = 25º C.

De aquí que debe resolverse el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\,(T - 25) \\ T(0) = 100 \\ T(10) = 80 \end{cases} \qquad (2)$$

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dado por la ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 25)\,dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $\frac{1}{T-25}$

$$\frac{1}{T-25}\,dT = \beta\,dt \qquad (4)$$

integrando de forma definida; el tiempo varía entre 0 min y 10 min; la temperatura varía entre 100ºC y 80º C

$$\int_{100}^{80} \frac{1}{T-25}\, dT = \beta \int_{0}^{10} dt \qquad (5)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{100}^{80} \frac{1}{T-25}\, dT = -\int_{80}^{100} \frac{1}{T-25}\, dT = -\ln\left| T-25 \right| \Big/_{80}^{100} = -\ln 75 + \ln 55 = \ln\left(\frac{55}{75}\right) = \ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

$$\beta \int_{0}^{10} dt = \beta \;\; t \Big/_{0}^{10} = 10\,\beta$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln\left(\frac{11}{15}\right) = 10\,\beta$$

de donde $\beta = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right)$. Este valor conseguido para β se sustituye en la ecuación (4)

$$\frac{1}{T-25}\, dT = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right) dt \qquad (6)$$

Para determinar la temperatura al cabo de 20 minutos, bastará con integrar en forma definida la ecuación (6); el tiempo varía entre t_0 = 0 min y t_2 = 20 min; la temperatura varía entre T_0 = 100º C y $T_2 <$ 100º C (T_2 es la temperatura a buscar)

$$\int_{100}^{T_2} \frac{1}{T-25}\, dT = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right) \int_{0}^{20} dt \qquad (7)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{100}^{T_2} \frac{1}{T-25}\, dT = -\int_{T_2}^{100} \frac{1}{T-25}\, dT = -\ln\left| T-25 \right| \Big/_{T_2}^{100} = -\ln 75 + \ln\left| T_2 - 25 \right| = \ln\left| \frac{T_2-25}{75} \right|$$

$$\frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right) \int_{0}^{20} dt = \left[\frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right)\right] t \Big/_{0}^{20} = \frac{20}{10} \ln\left(\frac{11}{15}\right) = 2 \ln\left(\frac{11}{15}\right) = \ln\left(\frac{11}{15}\right)^2$$

sustituyendo los resultados de las integrales es la ecuación (7)

$$\ln\left|\frac{T_2 - 25}{75}\right| = \ln\left(\frac{11}{15}\right)^2$$

aplicando e

$$\left|\frac{T_2 - 25}{75}\right| = \left(\frac{11}{15}\right)^2$$

despejando T_2

$$T_2 = 75\left(\frac{11}{15}\right)^2 + 25 = 65{,}33$$

Por lo tanto, la temperatura del agua luego de 20 minutos de iniciado el proceso de enfriamiento, es de 65,33º C.

A fin de determinar cuanto tiempo debe transcurrir para el agua alcance una temperatura de 40ºC, se integra en forma definida la ecuación (6); el tiempo varía entre $t_0 = 0$ min y $t = t_3$; la temperatura varía entre $T_0 = 100º$ C y $T_3 = 40º$ C

$$\int_{100}^{40} \frac{1}{T-25}\, dT = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\int_{0}^{t_3} dt \qquad (8)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{100}^{40} \frac{1}{T-25}\, dT = -\int_{40}^{100} \frac{1}{T-25}\, dT = -\ln\left|T-25\right| \Big/_{40}^{100} = -\ln 75 + \ln 15 = \ln\left(\frac{15}{75}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\int_{0}^{t_3} dt = \left[\frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\right] t \Big/_{0}^{t_3} = \frac{t_3}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

Sustituyendo los resultados de las integrales es la ecuación (8)

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{t_3}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

despejando t_3

$$t_3 = \frac{10\ \ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(\frac{11}{15}\right)} = 10\left(\frac{-1{,}61}{-0{,}31}\right) = 51{,}94$$

de aquí que, el agua demora 51,94 min, es decir 51 min y 56 seg, en enfriarse de 100º C a 40º C.

Para determinar cuanto tiempo debe transcurrir para el agua alcance una temperatura de 26ºC, se integra en forma definida la ecuación (6); el tiempo varía entre t_0 = 0 min y t = t_4; la temperatura varía entre T_0 = 100º C y T_4 = 26º C

$$\int_{100}^{26} \frac{1}{T-25}\, dT = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\int_{0}^{t_4} dt \qquad (9)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{100}^{26} \frac{1}{T-25}\, dT = -\int_{26}^{100} \frac{1}{T-25}\, dT = -\ln\left| T-25 \right| \Big/_{26}^{100} = -\ln 75 + \ln 1 = \ln\left(\frac{1}{75}\right)$$

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\int_{0}^{t_4} dt = \left[\frac{1}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)\right] t \Big/_{0}^{t_4} = \frac{t_4}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

Sustituyendo los resultados de las integrales es la ecuación (9)

$$\ln\left(\frac{1}{75}\right) = \frac{t_4}{10}\ln\left(\frac{11}{15}\right)$$

despejando t_4

$$t_4 = \frac{10\ \ln\left(\frac{1}{75}\right)}{\ln\left(\frac{11}{15}\right)} = 10\left(\frac{-4{,}31}{-0{,}31}\right) = 139$$

de aquí que, el agua demora 139 min, es decir 1 hora y 19 min, en enfriarse de 100º C a 26º C.

4. Agua a una temperatura de 10º C demora cinco minutos en calentarse a 20º C en un cuarto cuya temperatura es de 40º C.
a) Encuentre la temperatura después de 20 minutos y después de 30 min
b) ¿Cuándo la temperatura será de 25º C?

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a problemas de calentamiento es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_a) \qquad (T_a > T) \qquad (1)$$

La ecuación diferencial (1) debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t_0 = 0 min, la temperatura del agua es T_0 = 10º C; la segunda condición es que para el tiempo t_1 = 5 min, la temperatura del agua es T_1 = 20º C. Además, la temperatura del ambiente donde se calienta el agua es T_a = 40º C.

De aquí que debe resolverse el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta \left(T - 40 \right) \\ T(0) = 10 \\ T(5) = 20 \end{cases} \qquad (2)$$

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\dfrac{dT}{dt} \right) dt$, sustituyendo $\dfrac{dT}{dt}$ dada en la ecuación (2)

$$dT = \beta \, (T - 40) \, dt \qquad (T < 40) \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $\dfrac{1}{T-40}$

$$\frac{1}{T-40} \, dT = \beta \, dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-40} \, dT = \beta \int dt \qquad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{-1}{40-T} \, dT = \ln | T - 40 | + C_1$$

$$\beta \int dt = \beta \, t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln | 40 - T | = \beta \, t + C \qquad (5)$$

Para determinar el valor de la constante de integración C, se utiliza la condición T (0) = 10, es decir, se sustituye en la ecuación (5) t = 0 y T = 10 , obteniendo C = ln 30; este valor de C se sustituye en la ecuación (5)

$$\ln | 40 - T | = \beta \, t + \ln 30 \qquad (6)$$

Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad β, se utiliza la condición T(5) = 20, es decir, se sustituye en la ecuación (6) t = 5 y T = 20, obteniendo

$$\text{Ln } 20 = 5 \beta + \ln 30$$

despejando β

$$\beta = \frac{1}{5} \left(\ln 20 - \ln 30 \right)$$

por propiedades de logaritmo

$$\beta = \frac{1}{5}\ \ln\left(\frac{20}{30}\right) = \frac{1}{5}\ \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

este valor de β se sustituye en la ecuación (5)

$$\ln \mathrm{I}\ 40 - \mathrm{T}\ \mathrm{I} = \frac{t}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 30$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln \mathrm{I}\ 40 - \mathrm{T}\ \mathrm{I} = \ln\left[\ 30\left(\frac{2}{3}\right)^{t/5}\right]$$

aplicando e

$$40 - T = 30\left(\frac{2}{3}\right)^{t/5}$$

despejando T

$$T(t) = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{t}{5}\right)} \qquad (7)$$

La ecuación (7) representa la ley de variación de la temperatura del agua en cualquier instante t

Para obtener la temperatura al cabo de 20 minutos, se sustituye t = 20 en la ecuación (7)

$$T(20) = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{20}{5}\right)} = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = 40 - 30\ \left(\frac{16}{81}\right) = 40 - \frac{160}{27} = \frac{920}{27} = 34$$

de aquí resulta que al cabo de 20 min la temperatura del agua es de 34º C

Para obtener la temperatura al cabo de 30 minutos, se sustituye t = 30 en la ecuación (7)

$$T(20) = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{30}{5}\right)} = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{6} = 40 - 30\ \left(\frac{64}{729}\right) = 40 - \frac{640}{243} = \frac{9080}{243} = 37{,}4$$

de aquí resulta que al cabo de 30 min la temperatura del agua es de 37,4º C.

b) Para determinar el tiempo que debe transcurrir para que la temperatura del agua se caliente hasta 25º C, se sustituye T = 25 en la ecuación (7) y se busca el valor de t

$$25 = 40 - 30\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{t}{5}\right)}$$

esto es

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{t}{5}\right)} = \frac{40-25}{30} = \frac{1}{2}$$

aplicando logaritmo

$$\ln \left(\frac{2}{3}\right)^{\left(\frac{t}{5}\right)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

por propiedades de logaritmo

$$\left(\frac{t}{5}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

despejando t

$$t = 5\ \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 5\left(\frac{-0{,}69}{-0{,}41}\right) = 5\ (1{,}68) = 8{,}4$$

Por lo tanto, deben transcurrir 8,4 min, esto es 8 min y 24 seg, para que el agua se caliente hasta 25º C.

5. La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110º F. Cuando el termómetro marca 36º F se coloca en un horno. Después de 1 y 2 minutos, la temperatura que marca el termómetro es de 60º F y 82º F respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno?

SOLUCIÓN:

El problema planteado es un problema de calentamiento. La ecuación diferencial asociada, de acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\left(T - T_a\right) \qquad (1)$$

El ambiente en donde el termómetro se va a calentar es el horno, y su temperatura se desconoce. Por lo tanto, T_a debe determinarse

La ecuación diferencial (1) debe resolverse sujeta a tres condiciones; la primera condición es que la temperatura del termómetro, justo antes de llevarlo al horno es 36 º F, es decir, que para el tiempo t_0 = 0 min, la temperatura es T_0 = 36º F; la segunda condición es que al cabo de 1 min de llevar el termómetro en el horno, este marca 60º F, es decir, para el tiempo t_1 = 1 min la temperatura es T_1 = 60º F; y la tercera condición es que transcurridos 2 min de haber llevado el termómetro al horno este marca 82º F, es decir, para el tiempo t_2 = 2 min, la temperatura es T_2 = 82º F.

Por lo tanto, lo que se va a resolver es el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\left(T - T_a\right) \\ T(0) = 36 \\ T(1) = 60 \\ T(2) = 82 \end{cases}$$

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$, dado en la ecuación (1)

$$dT = \beta\,(T - T_a)\,dt \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (2) por el factor $\frac{1}{T - T_a}$

$$\frac{1}{T - T_a}\,dT = \beta\,dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T - T_a}\,dT = \beta \int dt \qquad (3)$$

Ambas integrales son inmediatas. Ya que es un problema de calentamiento $T_a > T$, entonces

$$\int \frac{1}{T - T_a}\,dT = \int \frac{-1}{T_a - T}\,dT = \ln\left| T_a - T \right| + C_1$$

$$\beta \int dt = \beta\,t + C_2$$

sustituyendo las resultados de las integrales en la ecuación (3)

$$\ln | T_a - T | = \beta\,t + C \qquad (4)$$

Para poder obtener T_a se debe evaluar la ecuación (4) en cada una de las condiciones de frontera.

Para T(0) = 36, se sustituye en la ecuación (4) t = o min y T = 36º F

$$\ln | T_a - 36 | = C \qquad (5)$$

Para T(1) = 60, se sustituye en la ecuación (4) t = 1 min y T = 60º F

$$\ln | T_a - 60 | = \beta + C \qquad (6)$$

Para T(2) = 82, se sustituye en la ecuación (4) t = 2 min y T = 82º F

$$\ln | T_a - 82 | = 2\beta + C \qquad (7)$$

Con las ecuaciones (5), (6) y (7) se plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: la constante de integración C, la constante de proporcionalidad β y la temperatura del horno T_a

Sustituyendo la ecuación (5) en las ecuaciones (6) y (7)

$$\ln | T_a - 60 | = \beta + \ln | T_a - 36 | \qquad (8)$$

$$\ln | T_a - 82 | = 2\beta + \ln | T_a - 36 | \qquad (9)$$

Multiplicando la ecuación (8) por 2 y restando con la ecuación (9)

$$2 \ln | T_a - 60 | - \ln | T_a - 82 | = 2 \ln | T_a - 36 | - \ln | T_a - 36 |$$

esto es

$$2 \ln | T_a - 60 | = \ln | T_a - 36 | + \ln | T_a - 82 |$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln | T_a - 60 |^2 = \ln \left| (T_a - 36) (T_a - 82) \right|$$

aplicando e

$$(T_a - 60)^2 = (T_a - 36) (T_a - 82)$$

desarrollando

$$T_a^2 - 120 T_a + 3600 = T_a^2 - 118 T_a + 2952$$

simplificando

$$2 T_a = 648$$

despejando T_a

$$T_a = 324º \text{ F}$$

De aquí que, la temperatura del horno, ambiente donde se calienta el termómetro, es de 324º F.

6. A las nueve de la mañana un pastel a 70º F es sacado del horno y llevado a una habitación donde la temperatura es de 15º F. Cinco minutos después la temperatura del pastel es de 45º F. A la 9:10 am se regresa al interior del horno, donde la temperatura es fija e igual a 70º F. ¿Cuál es la temperatura del pastel a las 9:20 am?

SOLUCIÓN:

Según puede deducirse del enunciado este problema es primero de enfriamiento y luego de calentamiento.

De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada es

$$\frac{dT}{dt} = \beta (T - T_a) \qquad (1)$$

Se debe resolver primero la ecuación (1) para el lapso de tiempo en que el pastel se saca del horno y se pone a enfriar, es decir, la ecuación (1) debe resolverse sujeta a dos condiciones: para el tiempo t_0 = 0 min (esto es, a las 9am) la temperatura del pastel es 70º F; para el tiempo t_1 = 5 min (esto es, a las 9:05 am) la temperatura del pastel es 45º F; la temperatura del ambiente donde se está enfriando el pastel es 15º F. De aquí que se debe resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta \left(T - 15 \right) \\ T(0) = 70 \\ T(5) = 45 \end{cases} \qquad (2)$$

Ya que la diferencial de la temperatura es dT = $\left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 15)\,dt \tag{3}$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (2) por el factor $\frac{1}{T-15}$

$$\frac{1}{T-15}\,dT = \beta\,dt \tag{4}$$

integrando la ecuación (4) definidamente: la temperatura varía de 70º a 45º; el tiempo varía de 0 min a 5 min

$$\int_{70}^{45} \frac{1}{T-15}\,dT = \beta \int_{0}^{5} dt \tag{5}$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{70}^{45} \frac{1}{T-15}\,dT = -\int_{45}^{70} \frac{1}{T-15}\,dT = -\ln\left|T-15\right| \Big/_{45}^{70} = -\ln 55 + \ln 30 = \ln\left(\frac{30}{55}\right) = \ln\left(\frac{6}{11}\right)$$

$$\beta \int_{0}^{5} dt = \beta\, t \Big/_{0}^{5} = 5\beta$$

Sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln\left(\frac{6}{11}\right) = 5\beta$$

despejando β

$$\beta = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)$$

sustituyendo este valor de β en la ecuación (4)

$$\frac{1}{T-15}\,dT = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right) dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-15}\,dT = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\int dt \tag{6}$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{1}{T-15}\, dT = \ln \mathrm{I}\ T - 15\ \mathrm{I} + C_1$$

$$\int dt\ = t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$\ln \mathrm{I}\ T - 15\ \mathrm{I}\ = \ \frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{11}\right)\ + C \qquad (7)$$

El valor de la constante C de integración, se determina usando la condición T(0) = 70, es decir, se sustituye en la ecuación (7) t = 0 min y T = 70º F, obteniéndose C = ln 55. Este valor de C se sustituye en la ecuación (7)

$$\ln \mathrm{I}\ T - 15\ \mathrm{I}\ = \ \frac{t}{5} \ln\left(\frac{6}{11}\right) + \ln 55$$

por propiedades de logaritmo

$$\ln \mathrm{I}\ T - 15\ \mathrm{I}\ = \ \ln\left[\ 55\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5}\ \right]$$

aplicando e

$$T - 15\ = \ 55\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5}$$

despejando T

$$T(t) = \ 15 + 55\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5} \qquad (8)$$

La ecuación (8) representa la ley de variación de la temperatura del pastel en función del tiempo, cuando es sacado del horno para que se enfríe (esto es en el intervalo de tiempo comprendido entre las 9 am y las 9:10 am).

Para determinar la temperatura del pastel a las 9:10 am, justo antes de ser llevado nuevamente al horno, se puede determinar, sustituyendo en la ecuación (8) t = 10 min (tiempo transcurrido desde que se sacó el pastel del horno)

$$T(10) = 15 + 55\left(\frac{6}{11}\right)^{10/5} = 15 + 55\left(\frac{6}{11}\right)^{2} = 15 + 55\left(\frac{36}{121}\right) = 15 + 5\left(\frac{36}{11}\right) = \frac{345}{11} = 31{,}36º$$

Por lo tanto, a las 9:10 am la temperatura del pastel es 31,36º F,

A partir de las 9:10 am el pastel es llevado nuevamente al horno; por lo tanto se plantea un problema de calentamiento. En este caso, la temperatura del ambiente a donde se lleva a calentar el pastel, es la temperatura del horno, esto es 70º F y la temperatura inicial es la temperatura que tiene el pastel a las 9:10 am. De aquí que deberá resolverse la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = \left[\frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] \ (T - 70) \qquad (9)$$

con la condición T(0) = 31,36 (T < 70)

Puesto que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right)$ dt, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (9)

$$dT = \left[\frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] \ (T - 70)\, dt \qquad (10)$$

La ecuación (10) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (10) por el factor $\frac{1}{T-70}$

$$\frac{1}{T-70}\, dT = \left[\frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-70}\, dT = \left[\frac{1}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] \int dt \qquad (11)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{1}{T-70}\, dT = \int \frac{-1}{70-T}\, dT = \ln |\, 70 - T \,| + C_3$$

$$\int dt = t + C_4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (11)

$$\ln |\, 70 - T \,| = \left[\frac{t}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] + K \qquad (12)$$

Para determinar el valor de K, recuerde que para el momento en que el pastel se lleva nuevamente al horno, esto es para el tiempo t = 0 min (9:10 am) en que se inicia el proceso de calentamiento, la temperatura del pastel es T = 31,36º F; sustituyendo en la ecuación (12) resulta K = ln (38,64). Este valor de K se sustituye en la ecuación (12)

$$\ln |\, 70 - T \,| = \left[\frac{t}{5}\ln\left(\frac{6}{11}\right)\right] + \ln (38{,}64)$$

por propiedades de logaritmo

$$\ln |\, 70 - T \,| = \ln\left[(38{,}64)\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5}\right]$$

aplicando e

$$70 - T = (38{,}64)\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5}$$

despejando T

$$T(t) = 70 - (38{,}64)\left(\frac{6}{11}\right)^{t/5} \qquad (13)$$

La ecuación (13) representa la ley de variación de la temperatura del pastel en cualquier instante t luego de ser llevado al horno (a partir de las 9:10 am en adelante).

Observe que de las 9:10 am, hora en que el pastel se lleva al horno, a las 9:20 am, han transcurrido 10 min. Así, para determinar la temperatura del pastel a las 9:20 am, se sustituye t = 10 en la ecuación (13)

$$T(10) = 70 - (38{,}64)\left(\frac{6}{11}\right)^{10/5} = 70 - (38{,}64)\left(\frac{6}{11}\right)^{2} = 70 - (38{,}64)\left(\frac{36}{121}\right) = 58{,}5$$

De aquí que la temperatura del pastel a las 9:20 am es de 58,5º F.

7. Un termómetro que marca 15º F se lleva al interior de una habitación donde la temperatura es 81º F. Un minuto más tarde la lectura del termómetro es 30ºF.
a) Determine la lectura del termómetro como una función del tiempo
b) Encuentre cuánto marcará el termómetro 5 min después de haber sido llevado a la habitación
c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que le termómetro marque 45º F?

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a los problemas de enfriamiento (o calentamiento) es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_a) \qquad (1)$$

Esta ecuación diferencial debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t = 0 min, la temperatura que marca el termómetro es T = 15º F; la segunda condición es que par el tiempo t = 1 min, la temperatura del termómetro es T = 30º; además la temperatura de la habitación a donde se lleva el termómetro (temperatura del ambiente) es T_a = 81º F. Estamos pues en presencia de un problema de calentamiento.

Por lo tanto, debe resolverse el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\,(T - 81) \\ T(0) = 15 \\ T(1) = 30 \end{cases} \qquad (2)$$

con T < 81

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dada en l ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 81)\,dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $\frac{1}{T-81}$

$$\frac{1}{T-81}\, dT = \beta\, dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-81}\, dT = \beta \int dt \qquad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{1}{T-81}\, dT = \int \frac{-1}{81-T}\, dT = \ln |81 - T| + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln |81 - T| = \beta\, t + C \qquad (5)$$

Para determinar el valor de la constante C de integración, se utiliza la condición T(0) = 15, es decir, se sustituye en la ecuación (5) t = 0 min y T = 15º F, obteniéndose C = ln 66. Este valor obtenido para C se sustituye en la ecuación (5)

$$\ln |81 - T| = \beta\, t + \ln 66 \qquad (6)$$

Para determinar el valor de la constante β de proporcionalidad, se utiliza la condición T(1) = 30, es decir, se sustituye en la ecuación (6) t = 1 min y T = 30º F, obteniéndose

$$\ln 51 = \beta + \ln 66$$

despejando β

$$\beta = \ln 51 - \ln 66 = \ln\left(\frac{51}{66}\right) = \ln\left(\frac{17}{22}\right)$$

este valor de β se sustituye en la ecuación (6)

$$\ln |81 - T| = t \ln\left(\frac{17}{22}\right) + \ln 66$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln |81 - T| = \ln\left[66\left(\frac{17}{22}\right)^{t}\right]$$

aplicando e

$$81 - T = 66\left(\frac{17}{22}\right)^t$$

despejando T

$$T(t) = 81 - 66\left(\frac{17}{22}\right)^t \qquad (7)$$

La ecuación (7) permite obtener las lecturas del termómetro en función del tiempo.

b) Para determinar cuanto marcará el termómetro luego de 5 min de haber sido llevado a la habitación, se sustituye en la ecuación (7) t = 5 min

$$T(5) = 81-66\left(\frac{17}{22}\right)^5 = 81-3\,\frac{(17)^5}{(22)^4} = 81-3\left(\frac{1419857}{234256}\right) = \left(\frac{18974736-4259571}{234256}\right) = 62{,}82$$

Así, al cabo de cinco minutos en el interior de la habitación, el termómetro marca 62,82º F.

c) A fin de establecer el tiempo que ha transcurrido cunado el termómetro marca 45º F, se sustituyer T = 45º F en la ecuación (7) y despejar el tiempo t

$$45 = 81 - 66\left(\frac{17}{22}\right)^t$$

realizando operaciones

$$\left(\frac{17}{22}\right)^t = \frac{81-45}{66} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11}$$

aplicando logaritmo

$$\ln\left(\frac{17}{22}\right)^t = \ln\left(\frac{6}{11}\right)$$

por propiedades de logaritmo

$$t\,\ln\left(\frac{17}{22}\right) = \ln\left(\frac{6}{11}\right)$$

despejando t

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{11}\right)}{\ln\left(\frac{17}{22}\right)} = \left(\frac{-0{,}61}{-0{,}26}\right) = 2{,}35$$

Por lo tanto, deben transcurrir 2,35 min, esto es 2 min y 2 seg, de haber llevado el termómetro a la habitación para marque 45º F.

8. Un termómetro que marca 75º F es llevado al exterior de una habitación, donde la temperatura es de 20º F, 4 min después la lectura del termómetro indica 55º F.
a) Encuentre la temperatura que marca el termómetro 7 min después de haberlo sacado
b) Determine el tiempo que debe transcurrir para que la lectura descienda desde 55º F a 21º F

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a problemas de enfriamiento es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_a) \qquad (1)$$

Esta ecuación diferencial debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t = 0 min la temperatura es T = 75º F; la segunda condición es que para el tiempo t = 4 min la temperatura es T = 55º F; además la temperatura del ambiente es T_a = 20º F.

Por lo tanto, se debe resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\left(T - 20\right) \\ T(0) = 75 \\ T(4) = 55 \end{cases} \qquad (2)$$

donde T > 20º.

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\dfrac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\dfrac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 20)\,dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables basta con multiplicar la ecuación (3) por el factor $\dfrac{1}{T-20}$

$$\frac{1}{T-20}\,dT = \beta\,dt \qquad (4)$$

La ecuación (4) se integra de forma definida; el tiempo varía de t = 0 min a t = 4 min; la temperatura varía de T = 75º F a T = 55º F

$$\int_{75}^{55} \frac{1}{T-20}\,dT = \beta \int_{0}^{4} dt \qquad (5)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{75}^{55} \frac{1}{T-20}\, dT = -\int_{55}^{75} \frac{1}{T-20}\, dt = -\ln\left| T-20 \right| \Big/_{55}^{75} = -\ \ln 55\ +\ \ln 35\ =\ \ln\left(\frac{35}{55}\right) = \ln\left(\frac{7}{11}\right)$$

$$\int_{0}^{4} dt\ =\ t\ \Big/_{0}^{4}\ =\ 4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln\left(\frac{7}{11}\right) = 4\beta$$

despejando β

$$\beta = \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right)$$

este valor obtenido para β, se sustituye en la ecuación (4)

$$\frac{1}{T-20}\ dT\ =\ \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right)\ dt \tag{6}$$

A fin de determinar la temperatura que marcará el termómetro después de 7 min de haberlo sacado de la habitación, se debe resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T-20}\, dT = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{7}{11}\right) dt \\ T(0) = 75 \\ T(7) = T_1 \end{cases}$$

Para resolver el problema de valor de frontera, se integra definidamente la ecuación diferencial (6); el tiempo varía de t = 0 min a t = 7 min; la temperatura varía de T = 75º F a $T = T_1$º F, siendo $20 < T_1 < 75$º la temperatura a determinar

$$\int_{75}^{T_1} \frac{1}{T-20}\ dT\ =\ \left[\ \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right)\right]\ \int_{0}^{7} dt \tag{7}$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{75}^{T_1} \frac{1}{T-20}\, dT = -\int_{T_1}^{75} \frac{1}{T-20}\, dT = -\ln\left| T-20 \right| \Big/_{T_1}^{75} = -\ \ln 55 + \ln\left| T_1 - 20 \right|$$

$$\int_0^7 dt = t \Big/_0^7 = 7$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$-\ln 55 + \ln\left| T_1 - 20 \right| = \frac{7}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right)$$

equivalentemente

$$\ln\left| T_1 - 20 \right| = \frac{7}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right) + \ln 55$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln\left| T_1 - 20 \right| = \ln\left[55\left(\frac{7}{11}\right)^{7/4}\right]$$

aplicando e

$$T_1 - 20 = \left[55\left(\frac{7}{11}\right)^{7/4}\right]$$

despejando T_1

$$T_1 = 20 + \left[55\left(\frac{7}{11}\right)^{7/4}\right] = 45^{\circ}$$

b) Un método para determinar el tiempo que debe transcurrir para que la temperatura descienda de 55º F a 21ºF es, a partir de la ecuación (6) obtener la ecuación de la temperatura en función del tiempo y con esa ecuación establecer el tiempo que demora en llegar la temperatura a 21º. Luego efectuar la diferencia entre el tiempo que demora el termómetro en alcanzar 21º, menos el tiempo que demora el termómetro en alcanzar 55º

La ecuación (6) es

$$\frac{1}{T-20}\ dT = \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right)\ dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-20}\, dT = \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{11}\right) \int dt \qquad (7)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{1}{T-20}\, dT = \ln | T - 20 | + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$\ln \mid T - 20 \mid \ = \ \frac{t}{4} \ \ln \left(\frac{7}{11} \right) \ + \ C \qquad (8)$$

Para determinar el valor de la constante C de integración se utiliza la condición T(0) = 75, esto es, se sustituye en la ecuación (8) t = 0 min y T = 75º F, obteniéndose C = ln55. Este valor de C se sustituye en la ecuación (8)

$$\ln \mid T - 20 \mid \ = \ \frac{t}{4} \ \ln \left(\frac{7}{11} \right) \ + \ \ln 55$$

despejando el tiempo t

$$t = 4 \left[\frac{\ln \left| T - 20 \right| - \ln 55}{\ln \left(\frac{7}{11} \right)} \right] = 4 \left[\frac{\ln \left| \frac{T-20}{55} \right|}{\ln \left(\frac{7}{11} \right)} \right] \qquad (9)$$

Ahora se sustituye T = 21º F en la ecuación (9)

$$t = 4 \left[\frac{\ln \left| \frac{21-20}{55} \right|}{\ln \left(\frac{7}{11} \right)} \right] = 4 \left[\frac{\ln \left(\frac{1}{55} \right)}{\ln \left(\frac{7}{11} \right)} \right] = 4 \left(\frac{-4{,}007}{-0{,}452} \right) = 35{,}5 \text{ min}$$

Por lo tanto, deben transcurrir 35,5 min para que la lectura del termómetro sea 21º F; además, se sabe que deben transcurrir 4 min para que la lectura del termómetro se 55º F. Luego, para que la lectura del termómetro descienda de 55º F a 21º F, debe restarse 4 a 35,5, obteniéndose 31,5.

Se tiene entonces que, deben transcurrir 31,5 min, esto es 31 min y 30 seg, para que la temperatura descienda de 55º F a 21º F

9. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20º C, se deja caer en un recipiente de agua hirviendo.
a) Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90º C si se sabe que su temperatura aumenta 2º en 1 seg
b) ¿Cuál será la temperatura de la barra al cabo de 45 seg?
c) ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98ºC?

SOLUCIÓN:

a) Del enunciado se deduce que se trata de un problema de calentamiento. De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a problemas de enfriamiento o calentamiento es

$$\frac{dT}{dt} = \beta \left(T - T_a \right) \qquad (1)$$

Esta ecuación debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t = 0 seg, la temperatura de la barra metálica es T = 20º C; la segunda condición es que transcurrido t = 1 seg, la temperatura de la barra aumenta 2º, es decir, T = 22º, además, para que la barra se caliente se deja caer en un recipiente de agua hirviendo; esto significa que la temperatura del ambientes donde la barra se caliente, es la del agua hirviendo, es decir, T_a = 100º C

Por lo tanto, se debe resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \beta\,(T - 100) \\ T(0) = 20^{\circ} \\ T(1) = 22^{\circ} \end{cases} \qquad (2)$$

siendo, 20 < T < 100

Ya que la diferencial de la temperatura es dT = $\left(\dfrac{dT}{dt}\right)$ dt, sustituyendo $\dfrac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 100)\,dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables se multiplica por el factor $\dfrac{1}{T-100}$

$$\frac{1}{T-100}\,dT = \beta\,dt$$

integrando

$$\int \frac{1}{T-100}\,dT = \beta \int dt \qquad (4)$$

Ambas integrales son inmediatas

$$\int \frac{1}{T-100}\,dT = \int \frac{-1}{100-T}\,dT = \ln\left|100 - T\right| + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (4)

$$\ln|100 - T| = \beta t + C \qquad (5)$$

Para determinar el valor de la constante C de integración se utiliza la condición T(0) = 20, esto es, se sustituye en la ecuación (5) t = 0 seg y T = 20º C, obteniéndose C = ln 80. Este valor que se obtuvo para C se sustituye en la ecuación (5)

$$\ln|100 - T| = \beta t + \ln 80 \qquad (6)$$

Para determinar el valor de la constante β de proporcionalidad se utiliza la condición T(1) = 22, esto es, se sustituye en la ecuación (6) t = 1 seg y T = 22º C, obteniéndose

$$\ln 78 = \beta + \ln 80$$

despejando β

$$\beta = \ln 78 - \ln 80$$

por propiedades de logaritmo

$$\beta = \ln\left(\frac{78}{80}\right) = \ln\left(\frac{39}{40}\right)$$

El valor conseguido para β se sustituye en la ecuación (6)

$$\ln | 100 - T | = t \ln\left(\frac{39}{40}\right) + \ln 80 \qquad (7)$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln | 100 - T | = \ln\left[80\left(\frac{39}{40}\right)^t\right]$$

aplicando e

$$100 - T = \left[80\left(\frac{39}{40}\right)^t\right]$$

despejando T

$$T(t) = 100 - \left[80\left(\frac{39}{40}\right)^t\right] \qquad (8)$$

La ecuación (8) representa la ley de variación de la temperatura de la barra de metal en cualquier instante t

A fin de establecer cuanto tiempo demora la barra en alcanzar los 90º C, se sustituye T = 90 en la ecuación (7) y determinar el tiempo t

$$\ln | 100 - 90 | = t \ln\left(\frac{39}{40}\right) + \ln 80$$

despejando t

$$t = \frac{\ln 10 - \ln 80}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} = \frac{-2.079}{-0,025} = 83,16$$

De aquí que, la barra de metal demora 83,16 seg, es decir 1min y 23 seg, en alcanzar los 90º C de temperatura.

b) Para determinar la temperatura de la barra al cabo de 45 seg, basta con sustituir en la ecuación (8) t = 45 seg y determinar el valor de la temperatura T

$$T(45) = 100 - \left[80 \left(\frac{39}{40} \right)^{45} \right] = 74,4$$

Así, a los 45 seg de iniciado el proceso de calentamiento, la barra alcanza una temperatura de 74,4º C.

c) A fin de establecer cuanto tiempo demora la barra en alcanzar los 98º C, se sustituye T = 98 en la ecuación (7) y determinar el tiempo t

$$\ln | 100 - 98 | = t \ln \left(\frac{39}{40} \right) + \ln 80$$

despejando t

$$t = \frac{\ln 2 - \ln 80}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} = \frac{-3.689}{-0,025} = 147,56$$

De aquí que, la barra de metal demora 147,56 seg, es decir 2min y 28 seg, en alcanzar los 98º C de temperatura.

10. Una taza de chocolate se retira de la cocina cuando alcanza 70º C de temperatura y se pone a reposar en la mesa de una habitación, donde la temperatura del aire es de 10º C. Transcurrido 1 min, la temperatura del chocolate es de 60º C
a) ¿Cuál será la temperatura del chocolate, luego de 3 min?
b) ¿Cuánto tiempo demorará el chocolate en enfriarse a 12º C?

SOLUCIÓN:

a) El problema planteado es un problema de enfriamiento. De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial asociada a este tipo de problemas es

$$\frac{dT}{dt} = \beta (T - T_a) \qquad (1)$$

Esta ecuación debe resolverse sujeta a dos condiciones: la primera condición es que para el tiempo t = 0 min la temperatura es T = 70º C; la segunda condición es que para el tiempo t = 1 min la temperatura es T = 60º C; además la temperatura de la habitación, es decir la temperatura del ambiente T_a, donde se pone a enfriar el chocolate es T_a = 10ºC.

De aquí que, debe resolverse el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \beta (T - 10) \\ T(0) = 70 \\ T(1) = 60 \end{cases} \qquad (2)$$

siendo T > 10

Ya que, la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right) dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dada en la ecuación (2)

$$dT = \beta\left(T-10\right) dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $\frac{1}{T-10}$

$$\frac{1}{T-10}\ dT = \beta\ dt \qquad (4)$$

Integrando definidamente la ecuación (4); el tiempo varía de t = 0 min a t = 1 min; la temperatura varía de T = 70º C a T = 60º C

$$\int_{70}^{60} \frac{1}{T-10}\ dT = \beta \int_{0}^{1} dt \qquad (5)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{70}^{60} \frac{1}{T-10}\ dT = -\int_{60}^{70} \frac{1}{T-10} = -\ln\left|T-10\right| \Big/_{60}^{70} = -\ln 60 + \ln 50 = \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\int_{0}^{1} dt = t \Big/_{0}^{1} = 1$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln\left(\frac{5}{6}\right) = \beta$$

Este valor de obtenido para β se sustituye en la ecuación (4)

$$\frac{1}{T-10}\ dT = \ln\left(\frac{5}{6}\right)\ dt$$

Para determinar la temperatura del chocolate luego de transcurridos 3 min, se plantea el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \frac{1}{T-10}\, dT = \ln\left(\frac{5}{6}\right) dt \\ T(0) = 70 \\ T(3) = T_3 \end{cases}$$

donde T_3 es la temperatura a determinar

La ecuación diferencial se integra definidamente: el tiempo varía entre t = 0 min y t = 3 min; la temperatura varía entre T = 70º C y T = T_3º C. Puesto que el chocolate se esta enfriando, entonces $10 < T_3 < 70$

$$\int_{70}^{T_3} \frac{1}{T-10}\, dT = \ln\left(\frac{5}{6}\right)\int_0^3 dt \tag{6}$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{70}^{T_3} \frac{1}{T-10}\, dT = -\int_{T_3}^{70} \frac{1}{T-10}\, dT = -\ln|T-10| \Big/_{T_3}^{70} = -\ln 60 + \ln|T_3 - 10|$$

$$\int_0^3 dt = t \Big/_0^3 = 3$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (6)

$$-\ln 60 + \ln|T_3 - 10| = 3 \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

equivalentemente

$$\ln|T_3 - 10| = 3 \ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln 60$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln|T_3 - 10| = \ln\left[60\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]$$

aplicando e

$$T_3 - 10 = 60\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

despejando T_3

$$T_3 = 10 + 60\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 + 60\left(\frac{125}{216}\right) = 10 + 5\left(\frac{125}{18}\right) = \frac{180 + 625}{18} = \frac{805}{18} = 44{,}72$$

De aquí que, la temperatura del chocolate, luego de 3 min de haberse retirado de la cocina, es T_3 = 44,72º C

b) A fin de establecer el tiempo que demorará el chocolate en alcanzar 12º C, se plantea el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T-10}\, dT = \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) dt \\ T(0) = 70 \\ T(t_4) = 12 \end{cases}$$

donde t_4 es el tiempo a determinar

La ecuación diferencial se integra definidamente: el tiempo varía entre t = 0 min y t = t_4 min ($t_4 > 0$) ; la temperatura varía entre T = 70º C y T = 12º C.

$$\int_{70}^{12} \frac{1}{T-10}\, dT = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \int_{0}^{t_4} dt \qquad (7)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{70}^{12} \frac{1}{T-10}\, dT = -\int_{12}^{70} \frac{1}{T-10}\, dT = -\ln\left|T-10\right| \Big/_{70}^{12} = -\ln 60 + \ln 2 = \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$\int_{0}^{t_4} dt = t \Big/_{0}^{t_4} = t_4$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$\ln\left(\frac{1}{30}\right) = t_4 \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

despejando t_4

$$t_4 = \frac{\ln\left(\frac{1}{30}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = \left(\frac{-3{,}40}{-0{,}18}\right) = 18{,}9$$

De aquí que, el chocolate alcanza de 12º C transcurridos 18,9 min, es decir 18 min y 54 seg, de haberlo retirado de la cocina.

11. Justamente antes del mediodía el cuerpo de una victima aparente de un homicidio se encuentra en un cuarto que se conserva a temperatura constante e igual a 70º F. A mediodía, la temperatura del cuerpo es de 80º F y a la una de la tarde es de 75º F. Considere que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de 98,6º F y que el cuerpo se ha enfriado de acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton. ¿Cuál fue la hora de la muerte?

SOLUCIÓN:

En este problema lo que se enfría es el cuerpo de una persona y lo hace de acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, por lo tanto la ecuación diferencial asociada al problema es

$$\frac{dT}{dt} = \beta\,(T - T_a) \qquad (1)$$

La temperatura al momento de la muerte, esto es para el tiempo $t_0 = 0$ min es $T_0 = 98,6º$ F. Sea h el lapso de tiempo transcurrido entre la hora de la muerte y el momento en que el cuerpo es encontrado; así para el tiempo $t_1 = h$ min (a las 12 m) la temperatura del cuerpo es $T_1 = 80º$ F; para el tiempo $t_2 = (h + 60)$ min (a la 1 pm) la temperatura del cuerpo es $T_2 = 75º$ F; además, la habitación donde se encuentra el cadáver tiene una temperatura constante de 70º F, es decir, la temperatura del ambiente a donde el cuerpo se enfría, es decir, $T_a = 70$.

De aquí que se debe resolver el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \beta\,(T - 70) \\ T(0) = 98,6 \\ T(h) = 80 \\ T(h+60) = 75 \end{cases} \qquad (2)$$

donde h, es el valor a determinar

Ya que la diferencial de la temperatura es $dT = \left(\frac{dT}{dt}\right)dt$, sustituyendo $\frac{dT}{dt}$ dado en la ecuación (2)

$$dT = \beta\,(T - 70)\,dt \qquad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de variables separables. Para separar las variables, se multiplica la ecuación (3) por el factor $\frac{1}{T-70}$

$$\frac{1}{T-70}\,dT = \beta\,dt \qquad (4)$$

Integrando la ecuación (4) definidamente: el tiempo varía de $t_0 = 0$ min a $t_1 = h$ min; la temperatura varía de $T_0 = 98,6º$ F a $T_1 = 80º$ F

$$\int_{98,6}^{80} \frac{1}{T-70}\, dT = \beta \int_{0}^{h} dt \qquad (5)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{98,6}^{80} \frac{1}{T-70}\, dT = -\int_{80}^{98,6} \frac{1}{T-70}\, dT = -\ln\left| T-70 \right| \Big/_{80}^{98,6} = -\ln 28,6 + \ln 10 = \ln\left(\frac{5}{14,3}\right)$$

$$\int_{0}^{h} dt = t \Big/_{0}^{h} = h$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (5)

$$\ln\left(\frac{5}{14,3}\right) = \beta\, h$$

despejando β

$$\beta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{5}{14,3}\right) \qquad (6)$$

Este valor obtenido para β se sustituye en la ecuación (4)

$$\frac{1}{T-70}\, dT = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{5}{14,3}\right) dt$$

Integrando definidamente: el tiempo varía de t_1 = h min a t_2 = h+60 min; la temperatura varía de T_1 = 80º F a T_2 = 75º F

$$\int_{80}^{75} \frac{1}{T-70}\, dT = \beta \int_{h}^{h+60} dt \qquad (7)$$

Resolviendo las integrales definidas

$$\int_{80}^{75} \frac{1}{T-70}\, dT = -\int_{75}^{80} \frac{1}{T-70}\, dT = -\ln\left| T-70 \right| \Big/_{75}^{80} = -\ln 10 + \ln 5 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{h}^{h+60} dt = t \Big/_{h}^{h+60} = 60$$

sustituyendo los resultados de las integrales en la ecuación (7)

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 60\ \beta$$

despejando β

$$\beta = \frac{1}{60}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (8)$$

Comparando las ecuaciones (6) y (8)

$$\frac{1}{h}\ \ln\left(\frac{5}{14,3}\right) = \frac{1}{60}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

despejando h

$$h = 60\ \left[\frac{\ln\left(\frac{5}{14,3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = 60\left(\frac{-1,05}{-0,69}\right) = 91,3$$

De aquí resulta que h = 91,3 min = 1hora 31 min 18 seg. Este es el tiempo que transcurrió desde la hora de la muerte hasta las 12 del mediodía. Esto quiere decir que, hay que restar 1h 31 min 18 seg a las 12 m, obteniendo 10 h 28 min 42 seg. Por lo tanto, la hora de la muerte fue a las 10 h 28 min 42 seg de la mañana.